REMA

RISOLUZIONE DI ESPRESSIONI MATRICIALI

Algebra delle matrici

a cura di

Ing. Mauro Cilloni

REMA

Risoluzione di Espressioni MAtriciali

INDICE

Prefazione …………………………………………………………………………………………….. 3

Diritto d'autore e marchi di fabbrica …………………………………………………………………… 4

Informazioni legali ……………………………………………………………………………………... 4

1. Introduzione ……………………………………………………………………………………… 5

2. Cenni di algebra delle matrici ……………………………………………………………………… 5
   2.1 Somma di due matrici
   2.2 Differenza di due matrici
   2.3 Prodotto di una matrice per uno scalare
   2.4 Prodotto di due matrici
   2.5 Potenza di una matrice quadrata
   2.6 Inversa di una matrice
   2.7 Complemento algebrico di una matrice (matrice dei cofattori)
   2.8 Matrice trasposta
   2.9 Determinante di una matrice
   2.10 Polinomio caratteristico di una matrice, autovalori ed autovettori
   2.11 Traccia di una matrice
   2.12 Sistema lineare di equazioni
   2.13 Proprietà delle matrici
   2.14 Identificazione delle coniche
   2.15 Identificazione delle quadriche

3. Utilizzo del programma …………………………………………………………………………….. 13
   3.1 Esecuzione del calcoli
   3.2 Gestione della memoria
   3.3 Manuale in linea
   3.4 Uscita dal programma

Bibliografia ……………………………………………………………………………………………… 21

Appunti …………………………………………………………………………………………………… 22

In copertina: la *Battaglia di Anghiari* di Leonardo da Vinci (copia di Paul Rubens)

REMA

Risoluzione di Espressioni MAtriciali

PREFAZIONE

Ho scritto questo programma nell'ormai lontano 1989 quando i computer erano enormi ed ingombranti apparati (molti senza neppure il disco rigido) nei quali i dati venivano memorizzati su fragili floppy-disk da 5.25" / 360 Kbyte. In quel periodo *Microsoft* aveva sviluppato il sistema operativo *DOS* ® (versione 3.00), tutti i comandi dovevano essere inseriti tramite complesse stringhe di testo da ricordare a memoria e la dimensione dei programmi non poteva superare i 64 Kbyte.

In questo contesto nacque REMA (<u>R</u>isoluzione di <u>E</u>spressioni <u>MA</u>triciali), un potente programma in grado di eseguire tutti i calcoli basilari dell'algebra delle matrici (somme prodotti, inversione, elevamento a potenza, calcolo del determinante, del polinomio caratteristico, ecc.). Il programma, anche se si presenta con una interfaccia grafica (GUI) ormai decisamente obsoleta possiede un motore di calcolo assai veloce e potente (è ad esempio in grado di calcolare il determinante di una matrice 20x20 in pochissimi millesimi di secondo) che lo rende ancora oggi, a distanza di venti anni, un prodotto "fresco" ed insostituibile nella risoluzione di espressioni matriciali e calcoli ingegneristici.

Il programma venne scritto in *Borland Turbo Pascal* ® ed ottimizzato per computer basati su processori *Intel* ® 80286 con 360 Kbyte RAM e dotati di sistema operativo *Microsoft DOS*. Al giorno d'oggi sono disponibili decine di programmi (alcuni anche gratuiti) in grado di trattare matrici ma nel 1989 questo programma fu un vero "pioniere" nel settore.

Ho deciso di pubblicare gratuitamente REMA per due motivi:

1) Il programma, seppure con una GUI "datata" può essere ancora un valido strumento di lavoro.
2) Volevo dimostrare come l'evoluzione tecnologica degli ultimi venti anni nel campo dell'informatica ha da un lato migliorato l'interfaccia uomo-macchina (rendendo i programmi più "semplici" da usare) ma al contempo ne ha ingigantito a dismisura la dimensione rendendo necessario un incremento delle capacità di calcolo delle macchine assolutamente ingiustificato rispetto ai reali risultati ottenuti.

Per utilizzare questo programma non servono macchine particolari, qualsiasi computer dotato di sistema operativo *Microsoft Windows* ® è in grado di far funzionare il programma al meglio.

<u>Nota</u>: A causa della diversa codifica dei caratteri tra i sistemi operativi DOS (tabella ASCII) e Windows (tabella ANSI) alcuni caratteri potrebbero non essere visualizzati correttamente. Questo fenomeno non comporta malfunzionamenti del programma.

Ing. Mauro Cilloni

DIRITTO D’AUTORE E MARCHI DI FABBRICA

1. Le specifiche del prodotto e la documentazione a corredo sono soggette a cambiamenti senza preavviso. Le marche e nomi di prodotti citati nel presente manuale sono marchi di fabbrica o marchi di fabbrica registrati dei loro rispettivi possessori.
2. Nessuna parte della documentazione può essere riprodotta in alcuna forma o da alcun mezzo o usato per eseguire derivati quali traduzioni, trasformazioni, o adattamenti senza il permesso dell’autore.
3. L’utilizzatore può installare il software su tutti i computer di sua esclusiva proprietà senza limitazioni.
4. Sono espressamente vietati il “Reverse Engineering” e tutte le pratiche atte a tentare di utilizzare parti del programma e/o a stravolgerne la natura.

INFORMAZIONI LEGALI

1. Il pacchetto software e tutte le altre informazioni fornite hanno il solo scopo di fornire uno strumento idoneo al calcolo di espressioni matriciali. Nessun altro utilizzo del presente software è consentito. L’utilizzo del software per usi diversi viola la licenza d’uso ed è pertanto da considerarsi illegittima.

2. Il software e le informazioni fornite vengono fornite "così come sono" senza garanzie o condizioni di alcun tipo, siano esse implicite o esplicite, comprese garanzie o condizioni di commerciabilità, di idoneità a uno scopo particolare. tali condizioni e garanzie implicite sono quindi escluse.

3. Utilizzando questo programma l'utente accetta il fatto che l’autore non si riterrà responsabile di alcun danno diretto, indiretto o consequenziale derivante dall'uso delle informazioni e del programma compresi, senza limitazione alcuna, perdite di profitti, interruzione dell'attività commerciale, perdita di programmi o altro.

4. L'utilizzatore si dichiara pienamente consapevole della possibilità che i danni descritti al precedente punto possano avvenire e ne accetta pienamente i rischi.

5. L’utilizzo del contenuto del programma comporta la piena accettazione da parte dell’utilizzatore di tutte le norme contenute in questo capitolo.

6. I marchi citati appartengono ai rispettivi proprietari.

REMA

Risoluzione di Espressioni MAtriciali

1. INTRODUZIONE

Il presente manuale non è un trattato di algebra delle matrici e non sostituisce alcun testo universitario. *"REMA"* permette di eseguire calcoli e risolvere espressioni matriciali con il metodo della "sostituzione progressiva". Il presente manuale mostra alcune delle potenzialità del prodotto. In linea generale il programma è in grado di funzionare su qualsiasi computer dotato di sistema operativo *Microsoft DOS / Windows* ® anche se con alcune particolari combinazioni Hardware / Software il programma potrebbe bloccarsi.

2. CENNI DI ALGEBRA DELLE MATRICI

I presenti richiami di algebra delle matrici non vogliono sostituire alcun testo e, soprattutto, non hanno la pretesa di essere esaustive e complete. Sono state inserite come semplice promemoria per il lettore che ha così la possibilità di ricordarsi concetti finiti a volte in "cassetti" sperduti della nostra mente.

Si definisce matrice ad *m* righe ed *n* colonne una tabella formata da *n* x *m* numeri (reali o complessi) disposti su *m* righe orizzontali (righe) ed *n* colonne verticali (colonne). Questi *n* x *m* numeri si dicono elementi della matrice.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \quad a_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura 2.1: Esempio di matrice

Se *m* = 1 si dice che la matrice è una *"matrice riga"* mentre se *n* = 1 si dice che la matrice è detta *"matrice colonna"*. Entrambe queste matrici sono *"vettori"*. Se *n* = *m* la matrice si dice *"quadrata"* di ordine *n* altrimenti la matrice si dice *"Rettangolare"*. Si chiamano *"elementi principali"* o *"elementi diagonali"* della matrice quadrata gli elementi a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn}. Si definisce infine "matrice diagonale" la matrice per la quale valgono la seguente condizione $a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$

2.1 <u>Somma di due matrici</u>:

La somma di due matrici *A* e *B* con *m* righe ed *n* colonne è la matrice (*A* + *B*) definita nel modo seguente: $(A + B)_{i,j}: = A_{i,j} + B_{i,j}$ (figura 2.2). La somma gode della proprietà commutativa (vale a dire A + B = B + A) ed associativa (vale a dire A + (B + C) = (A + B) + C).

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 3+0 & -2+5 \\ 1+2 & 0-5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Figura 2.2: Somma di due matrici

2.2 <u>Differenza di due matrici</u>:

La differenza di due matrici *A* e *B* con *m* righe ed *n* colonne è la matrice (*A* – *B*) definita nel modo seguente: $(A - B)_{i,j}: = A_{i,j} - B_{i,j}$ (figura 2.3). La differenza non gode della proprietà commutativa (poiché A – B ≠ B – A).

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-0 & 3-0 & -2-5 \\ 1-2 & 0+5 & 0-0 \\ 1-2 & 2-1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2.3: Differenza di due matrici

2.3 <u>Prodotto di una matrice per uno scalare</u>:

Il prodotto di una matrice per uno scalare (numero) è un'operazione che, data una matrice *A* ed un *scalare c* (numero), costruisce una nuova matrice *cA*, il cui elemento è ottenuto moltiplicando l'elemento corrispondente di *A* per *c*: $(cA)_{ij}: = cA_{i,j}$. (figura 2.4).

$$2\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3\\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\ 8 & -4 & 10\end{bmatrix}$$

Figura 2.4: Prodotto di una matrice per uno scalare

2.4 <u>Prodotto di due matrici</u>:

Il prodotto di due matrici *A* (*m* righe ed *n* colonne) e *B* (*p* righe e *q* colonne) è definito solo se *n* = *p*. Il risultato sarà una matrice *C* di *m* righe e *q* colonne il cui elemento $C_{i,j}$ è definito dalla seguente relazione:

$$C_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,n}B_{n,j}$$

Il prodotto gode della proprietà associativa (*A* x (*B* x *C*) = (*A* x *B*) x *C*) ma non della proprietà commutativa (vale a dire *A* x *B* ≠ *B* x *A* ammesso che i prodotti esistano entrambi).

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 11 & -2\end{bmatrix}$$

Figura 2.5: Prodotto di due matrici (A x B)

Il prodotto gode inoltre della proprietà distributiva rispetto alla somma:
(*A* + *B*) x *C* = (*A* x *C*) + (*B* x *C*) ed anche *C* x (*A* + *B*) = (*C* x *A*) + (*C* x *B*). Si noti che a parità di matrici i risultati delle due operazioni sono in generale differenti poiché il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa.

2.5 <u>Potenza di una matrice quadrata</u>:

La potenza di una matrice è un caso particolare di prodotto tra matrici (cfr. 2.4) possibile solamente se il numero di righe è uguale al numero di colonne (matrice quadrata). Si definisce infatti potenza n-esima di una matrice il prodotto della matrice per se stessa n volte: A^n = *A* x *A* x *A* x … x *A*

A^1 = A

A^2 = A x A

A^3 = A x A x A

A^4 = A x A x A x A

A^5 = A x A x A x A x A

……………………………..

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$A^0 = I$ (dove I è la matrice unità cfr. 2.6 – figura 2.6)

$A^h \times A^k = A^{(h+k)}$

$(A^h)^k = A^{(h \times k)}$

La potenza gode della proprietà commutativa: $A^h \times A^k = A^k \times A^h$

2.6 Inversa di una matrice:

Occorre ricordare brevemente il concetto di elemento neutro del prodotto. Si definisce elemento neutro del prodotto la matrice *I* tale per cui *A x I = A*. E' facile dimostrare che la matrice I ha la seguente forma: $I_{i,j} = 1$ se i = j ; $I_{i,j} = 0$ se i ≠ j (figura 2.6).

$$I_1 = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\ I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \cdots,\ I_n = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

Figura 2.6: Esempi di elementi neutri del prodotto

Una matrice quadrata *A* è invertibile se e solo se esiste una matrice quadrata *B* tale che *A x B = I = B x A.* In tal caso, *B* è la matrice inversa *A*, e si indica con A^{-1}. E' facile dimostrare che valgono le seguenti relazioni : $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$ e che $A^{-n} = (A^{-1})^n$

2.7 Complemento algebrico di una matrice (matrice dei cofattori):

Data una matrice quadrata *A* di ordine *n* (ha cioè *n* righe ed *n* colonne) il complemento algebrico di *A* è una matrice quadrata di ordine *n* il cui elemento $A_{i,j}$ (cofattore) è definito dalla relazione:

$$\mathrm{cof}(A,i,j) := (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathrm{minore}(A,i,j))$$

Nella quale il termine det(minore(*A*,*i*,*j*)) rappresenta il determinante del minore di *A* ottenuto cancellando la riga *i*-esima e la colonna *j*-esima. In figura 2.7 è mostrato un esempio di calcolo di alcuni cofattori di una matrice.

$$\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\-1 & 1 & 3\\2 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}\mathrm{cof}(A,1,2) &= (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix} = (-1)\cdot((-1)\cdot(-1) - 2\cdot 3)\\ \mathrm{cof}(A,2,2) &= (-1)^{2+2} \cdot \det\begin{bmatrix}-2 & -3\\2 & -1\end{bmatrix} = 1\cdot((-2)\cdot(-1) - 2\cdot(-3)) = 8\end{aligned}$$

Figura 2.7: Esempio di calcolo della matrice dei complementi algebrici

2.8 Matrice trasposta:
Si definisce matrice trasposta di una matrice *A* la matrice i cui elementi sono ottenuti scambiando le righe con le colonne della matrice *A* (figura 2.8):

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}, \quad \forall A \in \mathbf{K}^{m,n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.8: Esempio di calcolo della matrice trasposta

2.9 Determinante di una matrice:
Si definisce determinante di una matrice *A* (quadrata) uno scalare che ne sintetizza le proprietà algebriche. Esso viene generalmente indicato con det(*A*). Esistono vari metodi per calcolare il determinante di una matrice la cui trattazione esula dallo scopo di questo breve manuale.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 18$$

Figura 2.9: Esempio di calcolo del determinante

2.10 Polinomio caratteristico di una matrice, autovalori ed autovettori:
Si definisce polinomio caratteristico $P_A(x)$ di una matrice *A* (quadrata) l'espressione:

$$p_A(x) = \det(A - xI)$$

cioè è il determinante della matrice $A - xI$, ottenuta sottraendo da *A* la matrice xI (*I* denota la matrice identità (cfr. figura 2.6). E' facile dimostrare che il grado del polinomio caratteristico è pari all'ordine della matrice. Si definiscono autovalori della matrice *A* (quadrata) le soluzioni dell'equazione:

$$\det(A - xI) = 0$$

Si può facilmente dimostrare che il numero di autovalori è pari all'ordine della matrice. Si definiscono infine autovettori della matrice A (quadrata) quei vettori *Y* (il vettore è una matrice con una sola colonna o riga) per i quali vale la relazione:

$$AY = qY$$

q è un numero reale o complesso. REMA non calcola autovalori ed autovettori ma fornisce il polinomio caratteristico della matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A - xI = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & 3 \\ 0 & 4-x \end{bmatrix}$$

$$p_A(x) = \det(A - xI) = (1-x)(4-x)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B - xI = \begin{bmatrix} 2 & \pi & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-x & \pi & 0 \\ -1 & -3-x & 5 \\ 0 & 4 & 3-x \end{bmatrix}$$

$$p_B(x) = -x^3 + 2x^2 + (29 - \pi)x - (58 - 3\pi)$$

Figura 2.10: Esempi di calcolo del polinomio caratteristico per una matrice di ordine 2 ed una di ordine 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A - xI = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & 3 \\ 0 & 4-x \end{bmatrix}$$

$$\det(A - xI) = (1-x)(4-x) = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Figura 2.11: Esempi di calcolo degli autovalori di una matrice di ordine 2

2.11 Traccia di una matrice:

Si definisce traccia di una matrice *A* (quadrata) la somma di tutti gli elementi posti sulla sua diagonale principale:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

dove $a_{i,j}$ rappresenta l'elemento posto sulla *i*-esima riga e *j*-esima colonna di *A*.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{\textit{traccia}}(A) = -2$$

Figura 2.12: Calcolo della traccia di una matrice di ordine 3

La funzione traccia gode delle seguenti proprietà (se *B* sia una matrice quadrata con lo stesso numero di righe / colonne di *A* e c è uno scalare (numero)):

- tr (*A* x *B*) = tr (*B* x *A*)
- tr (*A* + *B*) = tr (*B* + *A*)
- tr (c *A*) = c tr (*A*)
- tr (*A*) = tr (A^T)

2.12 Sistema lineare di equazioni:

Un sistema di equazioni lineari con n incognite può essere scritto nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

dove $x_1, \ldots ,x_n$ sono le incognite, a_{ij}, sono i coefficienti e b_i i termini noti b_i

Usando la notazione matriciale possiamo scrivere lo stesso sistema come $Ax = b$ (dove A è la matrice m x n dei coefficienti, x è il vettore delle n incognite e b è il vettore degli m termini noti).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

REMA è in grado di calcolare il vettore delle incognite (x) data la matrice dei coefficienti (A) ed il vettore dei termini noti (b).

2.13 Proprietà delle matrici:

REMA è in grado di eseguire una serie di test sulle matrici per valutare le seguenti proprietà: simmetria, emisimmetria, ortogonalità, idempotenza, periodicità e nilpotenza (i cui significati verranno ora brevemente ricordati). Si dice che una matrice quadrata A è:

- simmetrica se vale la relazione: $A = A^T$
- emisimmetrica (o antisimmetrica) se vale la relazione: $A = -A^T$
- ortogonale se vale la relazione: $A^T = A^{-1}$
- idempotente se vale la relazione: $A^2 = A$
- periodica se esiste un intero n per cui vale la relazione: $A^n = I$
- nilpotente se esiste un intero n per cui vale la relazione: $A^n = 0$

Nota: con 0 si intende la matrice nulla cioè una matrice di n x m elementi nulli. La matrice 0 è l'elemento neutro della somma vale a dire $A + 0 = A$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.13: Matrice nulla

2.14 Identificazione delle coniche:
Una conica è rappresentata da una equazione del tipo (a destra la relativa matrice dei coefficienti):

$$a X^2 + b Y^2 + c X Y + d X + e Y + f = 0 \qquad \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

Il programma calcola gli invarianti della matrice dei coefficienti (quantità che non mutano al variare del riferimento cartesiano) e che rendono possibile risalire al tipo di conica. Si ricorda che per una conica sono definiti i seguenti invarianti: Invariante cubico (Inv^3), quadratico (Inv^2) e lineare (Inv^1).

$$Inv^3 = \det \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \qquad Inv^2 = \det \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \qquad Inv^1 = tr \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

Se $Inv^3 = 0$ ed $Inv^2 < 0$ la conica è degenere in due rette reali e distinte

Se $Inv^3 = 0$, $Inv^2 = 0$, $Inv^1 = 0$ la conica è degenere in due rette reali perpendicolari

Se $Inv^3 = 0$, $Inv^2 = 0$, $Inv^1 \neq 0$ la conica è degenere in due rette reali (non coincidenti e non perpendicolari)

Se $Inv^3 = 0$ ed $Inv^2 > 0$ la conica è degenere in due rette immaginarie coniugate

Se $Inv^3 \neq 0$, $Inv^2 < 0$, $Inv^1 = 0$ ho una iperbole equilatera

Se $Inv^3 \neq 0$, $Inv^2 < 0$, $Inv^1 \neq 0$ ho una iperbole non equilatera

Se $Inv^3 \neq 0$, $Inv^2 = 0$ ho una parabola

Se $Inv^2 > 0$, (Inv^3 x Inv^1) < 0 ho una ellisse reale

Se $Inv^2 > 0$, (Inv^3 x Inv^1) > 0 ho una ellisse immaginaria

2.15 Identificazione delle quadriche:
Una quadrica è rappresentata da una equazione del tipo (a destra la relativa matrice dei coefficienti):

$$a X^2 + b Y^2 + c Z^2 + d X Y + e X Z + f Y Z + g X + h Y + i Z + j = 0 \qquad \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 & g/2 \\ d/2 & b & f/2 & h/2 \\ e/2 & f/2 & c & i/2 \\ g/2 & h/2 & i/2 & j \end{bmatrix}$$

Come per le coniche, il programma calcola gli invarianti della matrice dei coefficienti (quantità che non mutano al variare del riferimento cartesiano) e che rendono possibile risalire al tipo di quadrica. Si ricorda che per una conica sono definiti i seguenti invarianti: Invariante biquadratico (Inv^4), cubico (Inv^3), quadratico (Inv^2) e lineare (Inv^1).

$$Inv^4 = \det \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 & g/2 \\ d/2 & b & f/2 & h/2 \\ e/2 & f/2 & c & i/2 \\ g/2 & h/2 & i/2 & f \end{bmatrix}$$

$$Inv^3 = \det \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$

$$Inv^2 = \det \begin{bmatrix} a & d/2 \\ d/2 & b \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b & f/2 \\ f/2 & c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & e/2 \\ e/2 & a \end{bmatrix}$$

$$Inv^1 = a + b + c$$

Se $Inv^3 \neq 0$, $Inv^4 > 0$ se $Inv^2 > 0$, $Inv^1 \times Inv^3 > 0$ la quadrica è un ellissoide immaginario altrimenti è un iperboloide ad una falda

Se $Inv^3 \neq 0$, $Inv^4 < 0$ se $Inv^2 > 0$, $Inv^1 \times Inv^3 > 0$ la quadrica è un ellissoide reale altrimenti è un iperboloide a due falde

Se $Inv^3 \neq 0$, $Inv^4 = 0$ se $Inv^2 > 0$, $Inv^1 \times Inv^3 > 0$ la quadrica è un cono immaginario altrimenti è un cono reale

Se $Inv^3 = 0$ ed $Inv^4 < 0$ la quadrica è un paraboloide ellittico

Se $Inv^3 = 0$ ed $Inv^4 > 0$ la quadrica è un paraboloide iperbolico

Se $Inv^3 = 0$ ed $Inv^4 = 0$ la quadrica è un cilindro o coppia di piani

3. UTILIZZO DEL PROGRAMMA

Cliccare su REMA per avviare il programma. Il programma mostrerà una pagina nella quale sono presenti le impostazioni principali. Premere:

- **A** per eseguire i calcoli
- **B** per consultare le matrici memorizzate
- **C** per consultare un breve manuale d'uso
- **D** per terminare il programma.

Figura 3.1: La pagina principale del programma

3.1 <u>Esecuzione del calcoli</u>:
Dopo aver premuto il tasto **A** appare la seguente schermata :

Figura 3.2: La pagina principale del programma

L'espressione matriciale segue le regole tipiche delle espressioni algebriche della matematica. Il programma è in grado di risolvere lunghe espressioni con molti livelli di parentesi a patto di rispettare alcune semplici regole.

REMA

Risoluzione di Espressioni MAtriciali

1. La matrice può essere solamente una tra queste: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8, M9. E' possibile inserire i nomi della matrice utilizzando i tasti funzione da F1 a F9 oppure mediante il tasto M seguito da un numero da 1 a 9.

2. Gli operatori "binari" *somma*, *differenza* e *prodotto* devono essere posti tra due matrici.
   Ad esempio sono valide le seguenti espressioni:
   - Somma di due matrici: M1+M2
   - Differenza di due matrici M1-M2
   - Prodotto di due matrici: M1*M2

3. Gli operatori "binari" *prodotto per un numero* e *potenza* devono essere posti dopo la matrice.
   Ad esempio sono valide le seguenti espressioni:
   - Prodotto di una matrice per un numero (es. 12.3): M1#12.3
   - Potenza di una matrice: M1^3
   - Matrice inversa: M1^ -1

4. Gli operatori "unari" *complemento algebrico* e *trasposizione* devono essere posti immediatamente a destra della matrice. Questi operatori restituendo come risultato una matrice possono essere utilizzati in combinazione ad altri calcoli successivi.
   Sono valide le seguenti espressioni:
   - Complemento algebrico: M1%
   - Matrice trasposta: M1'

5. Gli operatori "unari" *determinante & polinomio caratteristico*, *traccia*, *identificazione*, *proprietà* e l'operatore "binario" *sistema* devono essere posti immediatamente a destra della matrice inoltre, poiché essi restituiscono come risultato delle stringhe non possono essere utilizzati in combinazione ad altri calcoli successivi.
   Sono valide le seguenti espressioni:
   - Determinante e polinomio caratteristico della matrice: M1|
   - Traccia della matrice: M1\
   - Identificazione di una conica (o quadrica): M1$
   - Proprietà della matrice: M1P
   - Risoluzione di un sistema: M1]M2

Occorre a questo punto illustrare la metodologia adottata dal programma per risolvere le espressioni.
Regola 1: Il programma inizia a svolgere l'espressione partendo dalla parentesi più interna.

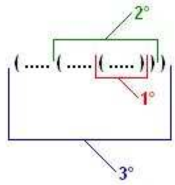

Figura 3.3: Ordine di svolgimento delle parentesi

Regola 2: All'interno della parentesi le operazioni vengono svolte da sinistra a destra senza nessuna ulteriore priorità. Le operazioni svolte vengono memorizzate in una matrice temporanea "M0".

Regola 3: All'interno delle parentesi deve essere sempre inserita una operazione valida. Non sono ammesse espressioni del tipo f(M): = (M1)+M2 oppure M1#(12.3).

Regola 4: Il controllo dimensionale delle matrici (numero di righe e colonne) viene svolto man mano che le operazioni vengono eseguite.

Dopo aver inserito l'espressione premere *"Invio"* o *"F10"* per ottenere il risultato.

Esempio 1: f(M) := M1*(M2+M3)
Il programma esegue prima l'operazione di somma M2+M3 e la memorizza nella matrice temporanea M0; viene quindi sostituito il contenuto della parentesi con M0 e calcolata l'espressione M1*M0; essendo questa l'ultima operazione da eseguire viene fornito il risultato.

Esempio 2: f(M) := M1*(M2+M3)|
Il programma esegue prima di tutto l'operazione di somma M2+M3 che viene memorizzata nella matrice appoggio M0; viene quindi sostituito il contenuto della parentesi con M0 (l'espressione diventa M1*M0|). Essendo adesso le due operazioni da compiere (moltiplicazione di M1 per M0 e calcolo del determinante) a pari livello, viene eseguita prima l'operazione M1*M0 (in quanto più a sinistra) e successivamente ne viene calcolato il determinante.

Esempio 3: f(M) := (M1*M2)+(M2*M3)
Questo esempio, seppure appaia formalmente ineccepibile produce un risultato errato. Il programma infatti calcola M1*M2 e lo memorizza nella matrice appoggio M0. L'espressione viene "trasformata" in M0+(M2*M3). Il programma a questo punti esegue il prodotto M2*M3 e lo memorizza in M0 sovra-scrivendone il vecchio valore. L'espressione diventa quindi M0+M0 (che corrisponderebbe all'espressione (M2*M3)+(M2*M3). Per risolvere correttamente questa espressione occorre utilizzare la funzione memoria e procedere come segue:

a. Calcolare l'espressione (M2*M3) e memorizzarla in una matrice (ad esempio M9)
b. Calcolare l'espressione (M1*M2)+M9

Esempio 4: f(M): = M1*M2+(M3+M4)
Anche questo esempio, seppure appaia formalmente ineccepibile produce un risultato errato. Il programma infatti calcola M3+M4 e lo memorizza nella matrice appoggio M0. A questo punto l'espressione diventa M1*M2+M0. Il programma esegue il prodotto M1*M2 e lo memorizza in M0 sovra-scrivendone il vecchio valore. L'espressione diventa infine M0+M0 (che corrisponderebbe all'espressione (M1*M2)+(M1*M2). Per risolvere correttamente questa espressione occorre utilizzare la funzione memoria e procedere come segue:

a. Calcolare l'espressione (M3+M4) e memorizzarla in una matrice (ad esempio M9)
b. Calcolare l'espressione M1*M2+M9

Per maggiori informazioni sull'uso della funzione memoria consultare il paragrafo 3.2

Figura 3.4: Esempio di ingresso di una espressione

Dopo aver inserito l'espressione e premuto *invio* (o *F10*) il programma inizia a richiedere i dati riguardanti le matrici partendo dalla richiesta del numero di righe e colonne.

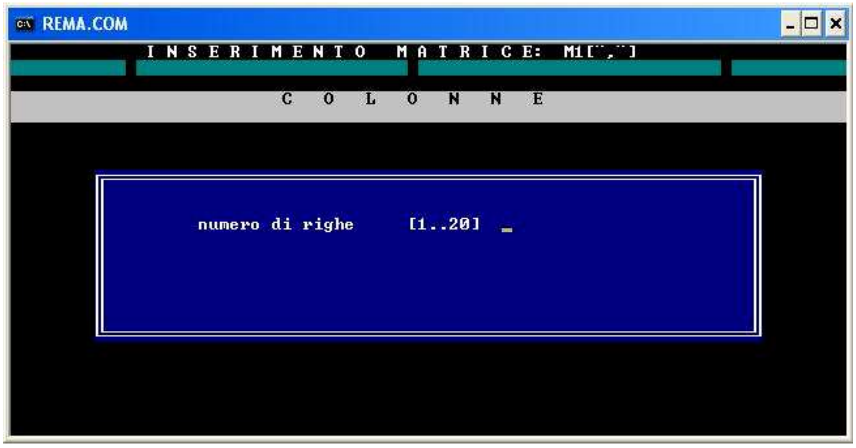

Figura 3.5: Definizione del numero di righe per la matrice

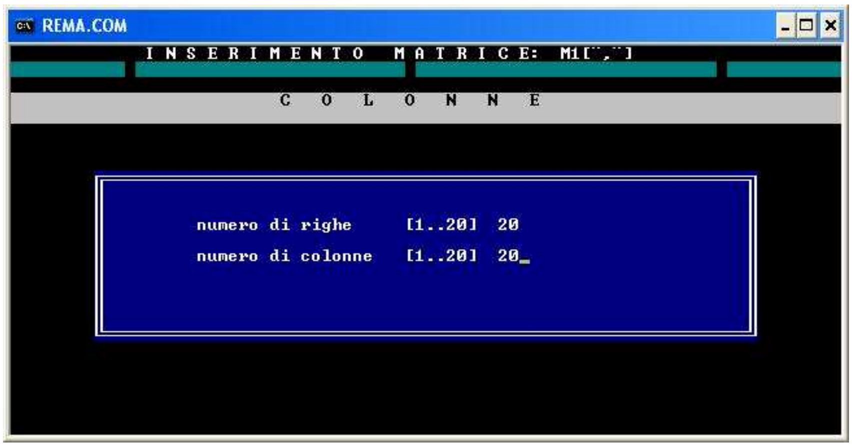

Figura 3.6: Definizione del numero di colonne per la matrice

Dopo aver inserito il numero di righe e colonne il programma chiede di confermare il dato. Confermando il dato (con il tasto S) si procede all'inserimento dei dati nella matrice, annullando il dato si torna alla schermata di figura 3.5.

I dati devono essere inseriti nella matrice utilizzando l'apposita maschera (figura 3.7). Per spostarsi da una casella all'altra utilizzare i quattro tasti del cursore. Se il numero di colonne della matrice eccede il numero massimo visualizzabile sullo schermo è possibile visualizzare le colonne eccedenti utilizzando i tasti *"pag-up"* e *"pag-down"*. Una volta inseriti tutti i dati nella matrice premendo il tasto *"Fine"* (su alcune tastiere questo tasto è indicato con *"End"*) è possibile proseguire con calcoli o con l'inserimento di altre matrici. Nelle singole caselle possono essere visualizzati solamente numeri compresi tra 9999.99 e -999.99 nel caso in cui i valori eccedessero questi limiti verrà mostrato il simbolo "■.■■" mentre il dato completo sarà visualizzato nell'apposita casella (figure 3.7 e 3.8).

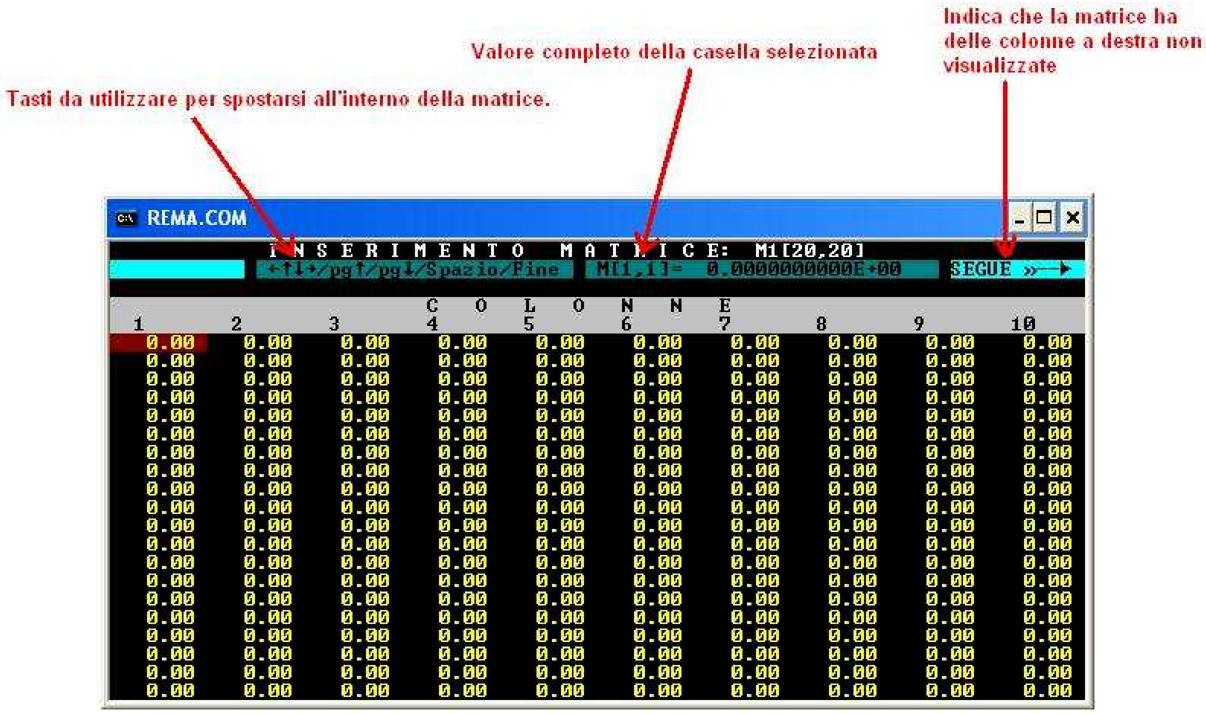

Figura 3.7: Pagina per l'inserimento dei dati nella matrice

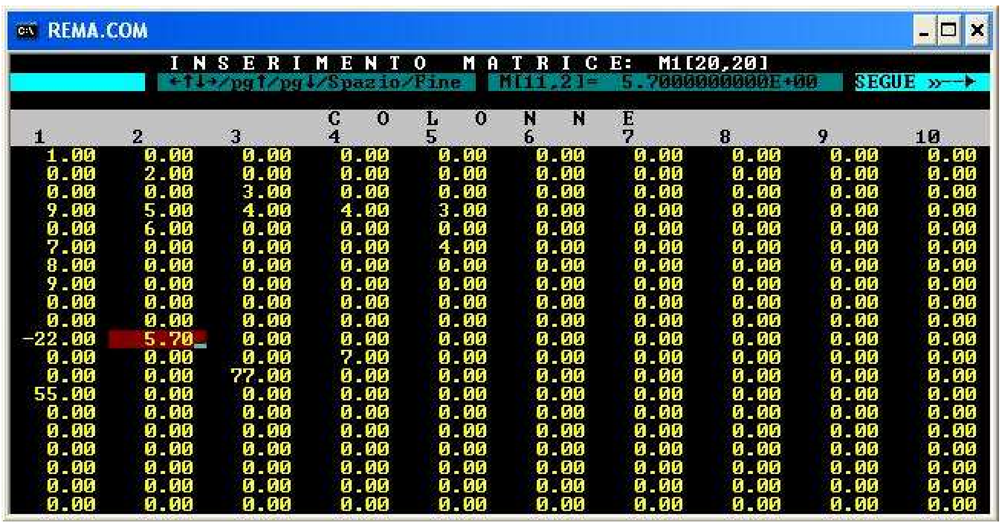

Figura 3.8: Inserimento dei dati in corso

Dopo aver inserito tutte le matrici verranno eseguiti i calcoli e mostrato il risultato (figura 3.9)

REMA

Risoluzione di Espressioni MAtriciali

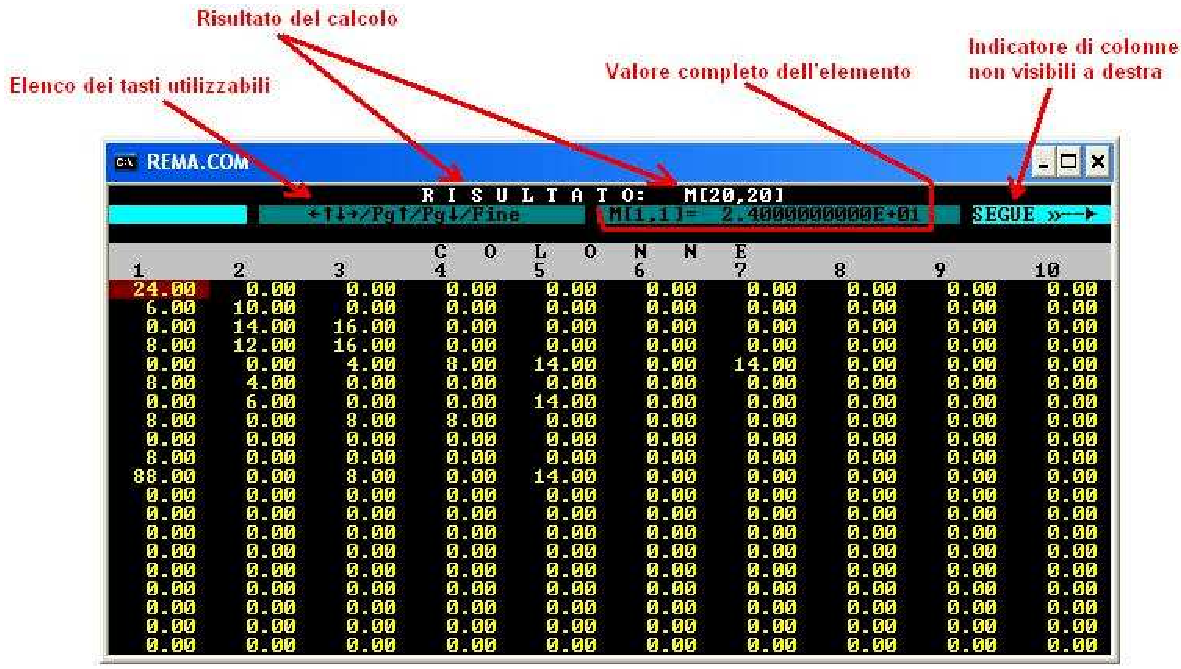

Figura 3.9: Visualizzazione del risultato

Per proseguire premere il tasto *"Fine"* (su alcune tastiere questo tasto è indicato con *"End"*). A questo punto il programma chiede se occorre memorizzare la matrice e nel caso in quale matrice (figura 3.10).

Figura 3.10: Richiesta di salvataggio della matrice

3.2 Gestione della memoria:
Premendo il tasto **B** (figura 3.1) è possibile scorrere lo stato della memoria del programma e decidere quali matrici salvare (per calcoli futuri e quali salvare). Il comando è attivo solamente se ci sono matrici in memoria. Per proseguire premere il tasto *"Fine"* (su alcune tastiere questo tasto è indicato con *"End"*) quindi decidere se mantenere o cancellare dalla memoria la matrice (figure 3.11 e 3.12).

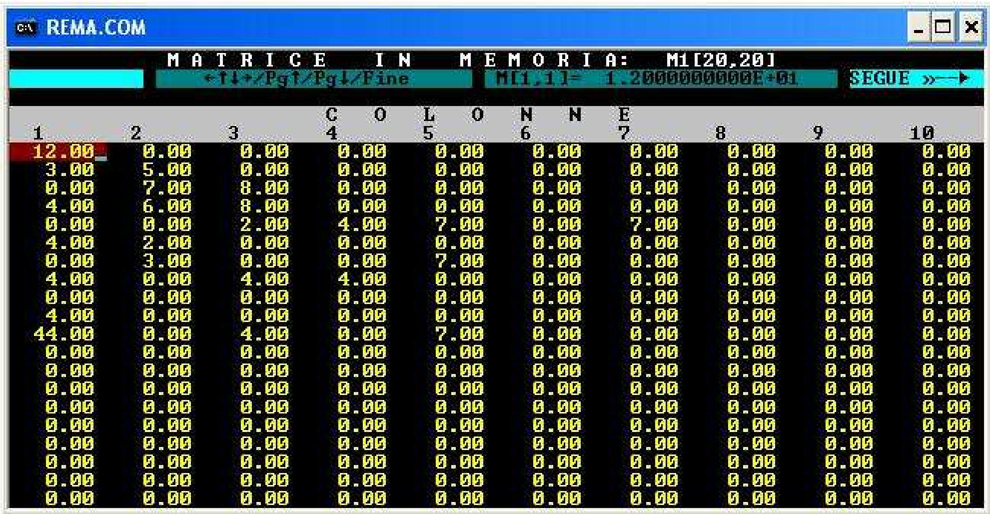

Figura 3.11: Visualizzazione di una matrice in memoria

Figura 3.12: Richiesta di mantenere in memoria la matrice

Attenzione: Uscendo dal programma tutte le matrici in memoria verranno cancellate. Il programma non esegue infatti alcun salvataggio dei dati su disco.

3.3 Manuale in linea:
Premendo il tasto **C** (figura 3.1) è possibile accedere ad un “manuale in linea” che spiega in modo sintetico ma completo il funzionamento del programma. A questo punto selezionando i capitoli da **A** ad **E** è possibile ottenere informazioni sul funzionamento del programma (figura 3.13). Per uscire dal manuale e tornare al programma premere il tasto **F**.

Figura 3.13: Accesso al manuale in linea.

3.4 Uscita dal programma:
Dalla maschera principale (figura 3.1) premere il tasto **D** per uscire dal programma.
Se si è nella pagina di “ingresso espressione” (figura 3.2) e si desidera uscire dal programma senza eseguire calcoli premere **F1** quindi premere due volte **Invio** (oppure **F10**). Una volta tornati alla pagina principale premere il tasto **D**.

BIBLIOGRAFIA

Per scrivere programma ed il relativo manuale ho utilizzato:

[1] U. Gasapina – Appunti di algebra delle matrici – Masson Italia 1986

[2] Appunti del corso di Geometria che ho frequentato presso il Politecnico di Milano nel 1986-87

[3] Enciclopedia “on line” Wikipedia

APPUNTI

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

APPUNTI

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....